3 Relationen und Funktionen

Wir haben im letzten Kapitel gewisse Mengenbeziehungen kennen gelernt. In diesem Kapitel wollen wir uns nun diejenigen Beziehungen anschauen, in denen Elementen einer Menge X Elemente einer zweiten Menge Y zugeordnet werden.

3.1 Relationen

Definition 3.1. Seien X und Y zwei Mengen. Eine (binäre) Relation R ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $X \times Y$, also

$$R \subset X \times Y = \{ (x, y) \,\big|\, (x \in X) \wedge (y \in Y) \}.$$

3.2 homogene Relationen

Definition 3.2. Falls $X = Y$ ist, spricht man von einer homogenen Relation.

3.3 reflexive, symmetrische, transitive Relationen

Definition 3.3. Sei X eine Menge und sei R eine homogene Relation auf X d. h.

$$R \subset X \times X = \{ (x_1, x_2) \,\big|\, (x_1 \in X) \wedge (x_2 \in X) \}.$$

(i) R heißt reflexiv, wenn für alle $x \in X$ gilt: $(x, x) \in R$.

(ii) R heißt symmetrisch, wenn für alle $x, y \in X$ gilt: $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$.

(iii) R heißt transitiv, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt: $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$.

3.4 Äquivalenzrelationen

Definition 3.4. Sei X eine Menge und sei R eine homogene Relation auf X d. h.

$$R \subset X \times X = \{ (x_1, x_2) \,\big|\, (x_1 \in X) \wedge (x_2 \in X) \}.$$

R heißt Äquivalenzrelation auf X, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

3.4.1 Beispiele

Beispiele

(i) Ist in der Menge der reellen Zahlen „=“ eine Äquivalenzrelation? Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

(R) $a = a$

(S) $a = b \Rightarrow b = a$

(T) $a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$.

In der Menge der reellen Zahlen ist „=“ eine Äquivalenzrelation.

(ii) Ist in der Menge der reellen Zahlen „≤“ eine Äquivalenzrelation? Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

(R) $a \leq a$

(S) $a \leq b \not\Rightarrow b \leq a$

(T) $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

Diese Relation ist zwar reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch.

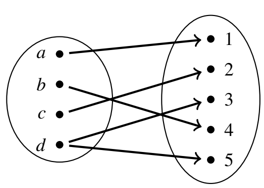
In der Menge der reellen Zahlen ist „≤“ keine Äquivalenzrelation.

3.5 Abbildung

Definition 3.5. Eine Relation zwischen zwei Mengen X und Y heißt Abbildung, wenn jedem $x \in X$ höchstens ein $y \in Y$ zugeordnet wird. [8]

Man spricht auch von „eindeutiger Relation“.

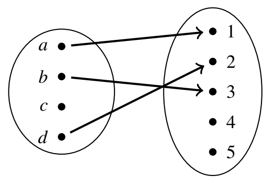
3.5.1 Abbildung



Ist das eine Abbildung $f : X \to Y$?
NEIN
d werden zwei Werte zugeordnet.

Abbildung 9:
Abbildung: nein

[8] Der Begriff *Abbildung* erscheint erstmals 1883 in einer Arbeit von S. KANTOR.



Ist das eine Abbildung $f\colon X \to Y$?
JA
Merke:
Von jedem $x \in X$ startet höchstens ein Pfeil.

Abbildung 10:Abbildung: ja

3.6 Bild und Urbild

Definition 3.6. In einer Abbildung f zwischen zwei Mengen X und Y, die man durch

$$\begin{aligned} f\colon X &\to Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

darstellt, bezeichnet man

(i) y als das Bild von x unter der Abbildung f und

(ii) x als das Urbild von y unter der Abbildung f.

Beispiel einer Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon Treibstoff &\to Geld \\ Menge[Liter] &\mapsto Geldbetrag[€] \end{aligned}$$

ist eine Abbildung, die jeder getankten Menge an Treibstoff den hierfür zu zahlenden Betrag zuordnet.

3.7 Surjektive Abbildung

Definition 3.7. Seien X und Y zwei Mengen sowie

$$\begin{aligned} f\colon X &\to Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

eine Abbildung.

Die Abbildung f heißt surjektiv, wenn jedes $y \in Y$ als Bild vorkommt. [9]

[9] Der Begriff *surjektiv* wurde 1954 durch durch Nicholas BOURBAKI eingeführt.

3.7.1 Surjektive Abbildung

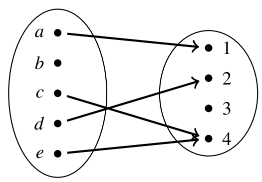


Abbildung 11:
Surjektiv: nein

Ist diese Abbildung $f\colon X \to Y$ surjektiv?
NEIN
Die 3 hat kein Urbild.

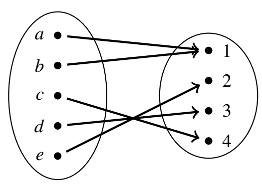


Abbildung 12:Surjektiv: ja

Ist diese Abbildung $f\colon X \to Y$ surjektiv?
JA
Merke:
Bei jedem $y \in Y$ endet mindestens ein Pfeil.

3.8 Injektive Abbildung

Definition 3.8. Seien X und Y zwei Mengen sowie

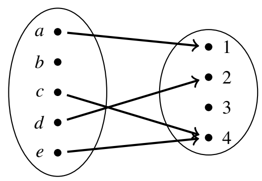
$$\begin{aligned} f\colon X &\to Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

eine Abbildung.

Die Abbildung f heißt injektiv, wenn es zu jedem Bild $y \in Y$ höchstens ein Urbild $x \in X$ gibt. [10]

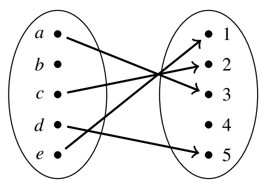
[10] Der Begriff *injektiv* wurde 1954 durch durch Nicholas BOURBAKI eingeführt.

3.8.1 Injektive Abbildung



Ist diese Abbildung $f\colon X \to Y$ injektiv?
NEIN
Die 4 hat zwei Urbilder.

Abbildung 13:
Injektiv: nein



Ist diese Abbildung $f\colon X \to Y$ injektiv?
JA
Merke:
Bei jedem $y \in Y$ endet höchstens ein Pfeil.

Abbildung 14:Injektiv: ja

3.9 Inverse Abbildung

Definition 3.9. Seien X und Y zwei Mengen sowie

$$\begin{aligned} f\colon X &\to Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

eine injektive Abbildung. Die Abbildung, die jedem Bild $y \in Y$ sein Urbild $x \in X$ zuordnet, heißt die inverse Abbildung zu f. Sie wird mit $\overset{-1}{f}$ bezeichnet, also

$$y = f(x) \quad \Rightarrow \quad x = \overset{-1}{f}(y)$$

3.9.1 Inverse Abbildung

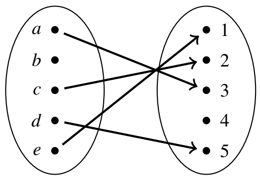


Abbildung 15:
Originalabbildung

Diese Abbildung $f\colon X \to Y$ ist injektiv, siehe letztes Beispiel

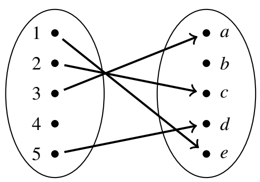


Abbildung 16:
Inverse Abbildung

Dies ist hierzu die inverse Abbildung $\overset{-1}{f}\colon Y \to X$

Merke:
Die Pfeile werden herumgedreht.

3.10 Bijektive Abbildung

Definition 3.10. Seien X und Y zwei Mengen sowie

$$\begin{aligned} f\colon X &\to Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

eine Abbildung. Die Abbildung f heißt bijektiv, [11] wenn

(i) f injektiv

(ii) f surjektiv

(iii) $\overset{-1}{f}$ surjektiv

ist.

[11] Der Begriff *bijektiv* wurde 1954 durch durch Nicholas BOURBAKI eingeführt.

3.10.1 Bijektive Abbildung

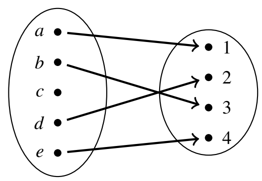


Abbildung 17:
Bijektiv: nein

Ist diese Abbildung $f\colon X \to Y$ bijektiv? NEIN

f injektiv: JA
f surjektiv: JA
$\overset{-1}{f}$ surjektiv: NEIN. Das c hat kein Urbild.

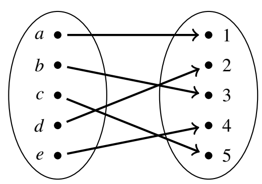


Abbildung 18:Bijektiv: ja

Ist diese Abbildung $f\colon X \to Y$ bijektiv? JA
f injektiv: JA
f surjektiv: JA
$\overset{-1}{f}$ surjektiv: JA
Merke:
Zwischen den Mengen X und Y herrscht eine Eins-zu-Eins-Beziehung.

3.11 Funktion

Definition 3.11. Eine Abbildung zwischen zwei Zahlmengen heißt Funktion. [12]

Beispiel einer Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to [0, \infty[\\ x &\mapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

ist die Funktion, die jedem x das Quadrat von x, also x^2 zuordnet.

3.12 Argument und Wert

Definition 3.12. Seien X und Y zwei Zahlmengen und sei eine Funktion

$$\begin{aligned} f\colon X &\to Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

gegeben.

[12] Der Begriff *Funktion* wurde 1673 durch Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646-1716) eingeführt.